AL/2016/11/S-I

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2016 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2016 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2016

උසස් ගණිතය I உயர் கணிதம் I Higher Mathematics I	11 S I	පැය තුනයි மூன்று மணித்தியாலம் Three hours

විභාග අංකය | | | | | | | |

උපදෙස් :

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
* **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(11) උසස් ගණිතය I

කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

I පත්‍රය	
II පත්‍රය	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ: 1	
2	
අධීක්ෂණය කළේ:	

[දෙවැනි පිටුව බලන්න.

A කොටස

1. සාධකවලට වෙන් කරන්න: $(x+y)^3(x-y)+(y+z)^3(y-z)+(z+x)^3(z-x)$.

2. ℝ මත R සම්බන්ධයක්, $x^2-y^2-x+y=0$ නම් xRy මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ. R යන්න ℝ මත තුල්‍යතා සම්බන්ධයක් බව පෙන්වන්න.

3. $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = (ax+1)^{\frac{1}{3}}$ හා $g(x) = 3x+4$ යන ඒවා $(f \circ g)(1) = 2$ වන පරිදි වේ යැයි ගනිමු; මෙහි a තාත්ත්වික නියතයකි. a හි අගය සොයන්න.

$h(x) = (f \circ f)(x)$ යැයි ගනිමු. $h^{-1}(x)$ සොයන්න.

4. $\begin{vmatrix} b+c & c & b \\ c & a+c & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix} = 4abc$ බව පෙන්වන්න.

5. $y^2 = 4ax$ පරාවලයට $(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බයේ සමීකරණය $y + tx = 2at + at^3$ බව පෙන්වන්න.

$y^2 = 4ax$ පරාවලයෙහි නාභිය ඔස්සේ මෙම අභිලම්බය යයි නම්, t හි අගය සොයන්න.

6. $a \in \mathbb{R}$ යැයි ද $b \geq 1$ යැයි ද $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ යනු

$$f(x) = \begin{cases} x\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), & x < 0 \text{ නම්,} \\ a, & x = 0 \text{ නම්,} \\ \sqrt{b - 1 + x}, & x > 0 \text{ නම්,} \end{cases}$$

මගින් දෙනු ලබන ශ්‍රිතය යැයි ද ගනිමු. $x = 0$ හි දී f සන්තතික වෙයි නම්, a හා b හි අගයන් සොයන්න.

7. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ යනු, $f(x)=\begin{cases} x, & x<1 \text{ නම්,} \\ x^2-2x+2, & x\geq 1 \text{ නම්,}\end{cases}$

ලෙස අර්ථ දැක්වෙන ශ්‍රිතය යැයි ගනිමු. $x=1$ හි දී f අවකලනය වේ ද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

සියලු ම $x\neq 1$ සඳහා $f'(x)$ ලියා දක්වන්න.

8. $x=0$ විට $y=\ln 2$ අවශ්‍යතාවට යටත්ව $\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=e^{x-y}+x^2e^{-y}$ විසඳන්න.

9. f හා g යනු $x\in[0, 1]$ සඳහා $2x f(x^2) + 3g(x) = 14x$ සමීකරණය සපුරාලන $[0, 1]$ ප්‍රාන්තරය මත තාත්ත්වික අගයැති සන්තතික ශ්‍රිත යැයි ගනිමු.

$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ නම්, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$ බව පෙන්වන්න.

10. $r = 2$ හා $r = 2(\cos\theta - \sin\theta)$ ධ්‍රැවක සමීකරණ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රවල දළ සටහන් එක ම රූපයක ඇඳ ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

* *

Department of Examinations Sri Lanka

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2016 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2016 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2016

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 S I

B කොටස

※ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) A, B හා C යනු S සර්වත්‍ර කුලකයක උපකුලක යැයි ගනිමු. ඔබ භාවිත කරන කුලක වීජයේ නියමයන් පැහැදිලි ව ප්‍රකාශ කරමින්

(i) $(B-A)\cup(C-A)=(B\cup C)-A$ හා

(ii) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$ බව පෙන්වන්න;

මෙහි $A-B$ කුලකය $A-B = A\cap B'$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

(b) A, B හා C නගර තුනෙන් අඩු තරමින් එක් නගරයකට හෝ ගොස් තිබූ මිනිසුන් 40 දෙනකු සහභාගී කරගත් සමීක්ෂණයක දී මිනිසුන් 22 දෙනකු A නගරයට ද 23 දෙනකු B නගරයට ද 19 දෙනකු C නගරයට ද ගොස් තිබූ බව හෙළි විය. තව ද මිනිසුන් 18 දෙනකු A හා B නගර දෙකට ද 11 දෙනකු A හා C නගර දෙකට ද 13 දෙනකු B හා C නගර දෙකට ද 11 දෙනකු නගර තුනට ම ද ගොස් තිබූ බව හෙළි විය.

(i) A ට හෝ B ට ගොස් තිබූ,

(ii) B ට හා C ට ගොස් තිබූ එහෙත් A ට ගොස් නොතිබූ,

(iii) B ට හෝ C ට ගොස් නොතිබූ,

මිනිසුන් ගණන සොයන්න.

12. (a) a, b හා c යනු ධන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු. $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ යන අසමානතාව උපකල්පනය කරමින්

(i) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geq 9$ බව,

(ii) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{9}{2}$ බව හා

(iii) $0<a<1$ සඳහා $(1-a)(1+a)^2 \leq \dfrac{32}{27}$

බව සාධනය කරන්න.

(b) xy - තලයේ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ පරිණාමනය $(a, 2)$ ලක්ෂ්‍යය, (a, b) ලක්ෂ්‍යයට අනුරූපණය කරයි;

මෙහි a හා b තාත්ත්වික නියත වේ. a හා b හි අගයන් සොයන්න.

මෙම පරිණාමනය $x=1$ රේඛාව $px'+qy'+r=0$ රේඛාවට අනුරූපණය කරයි; මෙහි p, q හා r තාත්ත්වික නියත වේ. p, q හා r හි අගයන් සොයන්න.

මෙම පරිණාමනය යටතේ $2x'+y'=1$ රේඛාව මතට අනුරූපණය වනු ලබන xy-තලයේ වූ රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

[අටවැනි පිටුව බලන්න.

13. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා **ද මුවාවර් ප්‍රමේයය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$k = 0, 1, 2, \ldots$ සඳහා $\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$ යැයි ගනිමු. $k = 0, 1, 2, \ldots$ සඳහා $\omega_k^5 = 1$ බව පෙන්වා,

ඒ නයින්, $z^5 - 1 = 0$ සමීකරණයේ ප්‍රභින්න මූල පහ ලියා දක්වන්න.

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ හා ω_4 යනු $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ සමීකරණයේ ප්‍රභින්න මූල හතර බව **අපෝහනය** කරන්න.

$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \left\{z^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) z + 1\right\}\left\{z^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) z + 1\right\}$ බව තවදුරටත් **අපෝහනය** කරන්න.

මෙම සර්වසාම්‍යයේ z^2 හා z^3 හි සංගුණක සැසඳීමෙන් $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ හා $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ මූල ලෙස ඇති නිඛිල සංඛ්‍යාමය සංගුණක සහිත වර්ගජ සමීකරණය ලබා ගන්න.

ඒනයින්, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ බව පෙන්වන්න.

14. (*a*) C_1 හා C_2 යනු පිළිවෙළින් $x = y^2$ හා $x = 2 - y^2$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍ර යැයි ගනිමු. ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක දක්වමින් C_1 හා C_2 හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න.

C_1 හා C_2 වක්‍ර දෙකෙන් සපර්යන්ත වන S පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

$x = 3$ රේඛාව වටා මෙම S පෙදෙස සෘජු කෝණ හතරකින් භ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඝනයෙහි පරිමාව ද සොයන්න.

(*b*) වක්‍ර කුලයක් $\frac{dy}{dx} = \frac{4x + y}{x - 4y}$ අවකල සමීකරණය තෘප්ත කරයි. $y = xV$ ආදේශ කිරීමෙන්, දී ඇති අවකල සමීකරණය $\frac{1 - 4V}{4(1 + V^2)}\, dV = \frac{1}{x}\, dx$ ට පරිණාමනය වනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, වක්‍ර කුලයට $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(x^2 + y^2\right) = \lambda$ යන කාටීසීය නිරූපණය ඇති බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ.

මෙම වක්‍ර කුලයේ ප්‍රලම්බ පරාවක්‍ර මගින් තෘප්ත කරනු ලබන අවකල සමීකරණය ද ලබා ගන්න.

15. (*a*) $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $I_n = \int_0^1 (1 - x^3)^n x\, dx$ යැයි ගනිමු.

$n = 2, 3, \ldots$ සඳහා $(3n + 2)I_n = 3nI_{n-1}$ බව පෙන්වා, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $I_n = \frac{3^n\, n!}{(3n + 2)\,(3n - 1) \cdots 8 \cdot 5 \cdot 2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $y = e^{\cos x}$ යැයි ගනිමු.

$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin x \frac{dy}{dx} + (\cos x)\, y = 0$ බව පෙන්වන්න.

x^4 හි පදය ද ඇතුළු ව ඒ දක්වා y හි මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය ලබා ගන්න.

ඒ නයින්, $\int_0^1 e^{\cos x}\, dx$ අනුකලය සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

16. $T \equiv \left(\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), \frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)$ ලක්ෂ්‍යය $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ බහුවලය මත පිහිටන බව සත්‍යාපනය කරන්න. මෙහි $t\,(\neq 0)$ යනු පරාමිතියකි.

T ලක්ෂ්‍යයෙහි දී බහුවලයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලබා ගන්න.

$P \equiv (at, bt)$ හා $Q \equiv (at', -bt')$ ලක්ෂ්‍ය බහුවලයේ ස්පර්ශෝන්මුඛ මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන R, බහුවලය මත පිහිටන බව දී ඇත. $tt' = 1$ බව ද PQ රේඛාව R හි දී බහුවලය ස්පර්ශ කරන බව ද පෙන්වන්න.

$OP \cdot OQ = a^2 + b^2$ බව ද පෙන්වන්න. මෙහි O යනු මූලය වේ.

R සිට බහුවලයේ ස්පර්ශෝන්මුඛවලට ඇඳි අභිලම්බ, ස්පර්ශෝන්මුඛවලට හමු වන ලක්ෂ්‍ය L හා M යැයි ගනිමු.

$RL \cdot RM = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

17. (*a*) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = \frac{3+\sin^2 x}{2+\cos^2 x}$ යැයි ගනිමු.

(i) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $1 \leq f(x) \leq 2$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $f(x) = 1$ හා $f(x) = 2$ සමීකරණ විසඳන්න.

(iii) $0 \leq x \leq \pi$ සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) පහත වගුවෙන්, එහි දැක්වෙන x හි අගයන් සඳහා, $f(x) = \ln(1+x^2)$ ශ්‍රිතයෙහි අගයන් දශමස්ථාන තුනකට නිවැරදි ව දෙයි.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	0	0.223	0.693	1.179	1.909

ඉහත වගුවෙහි දී ඇති අගයන් සමග සිම්සන් නීතිය භාවිතයෙන්, $y = \ln(1+x^2)$, $x = 0$, $x = 2$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් සපරියන්ත වර්ගඵලය සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

$\int_{-2}^{2} \ln\sqrt{1+x^2}\, dx$ සඳහා ආසන්න අගයක් **අපෝහනය** කරන්න.

* * *

Department of Examinations Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2016 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2016 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2016

උසස් ගණිතය II உயர் கணிதம் II Higher Mathematics II	11 S II		පැය තුනයි மூன்று மணித்தியாலம் Three hours

විභාග අංකය | | | | | | | |

උපදෙස් :

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- **A කොටස**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.
- සංඛ්‍යාන වගු සපයනු ලැබේ.

- g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(11) උසස් ගණිතය II

කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

I පත්‍රය	
II පත්‍රය	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

[දෙවැනි පිටුව බලන්න.

A කොටස

1. O අචල මූලයක් අනුබද්ධයෙන් P ලක්ෂ්‍යයක $\mathbf{r}$ පිහිටුම් දෛශිකය,

$\mathbf{r} = \left(\frac{1}{2}a\sin\theta\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\sin\theta\right)\mathbf{j} + (a\cos\theta)\mathbf{k}$ මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි $\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$ අදිශ පරාමිතියක් ද a ධන නියතයක් ද වේ.

(i) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = a^2$ (ii) $\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = 0$ හා (iii) $\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \frac{a^2}{2}\left(-\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}\right)$ බව පෙන්වන්න.

2. පිළිවෙළින් $a\mathbf{i}$, $b\mathbf{j}$ හා $c\mathbf{k}$ පිහිටුම් දෛශික සහිත A, B හා C ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ $P(b\mathbf{j}+c\mathbf{k})$, $P(c\mathbf{k}+a\mathbf{i})$ හා $P(a\mathbf{i}+b\mathbf{j})$ බල තුන ක්‍රියාකරයි; මෙහි P ධන නියතයක් හා a, b, c යනු $abc \neq 0$ වන පරිදි වූ නියත වේ. මෙම පද්ධතිය $\mathbf{r} = \lambda(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k})$ ක්‍රියා රේඛාව සහිත තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට ඌනනය වන බව පෙන්වන්න; මෙහි λ පරාමිතියකි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය සොයන්න.

3. ABC ත්‍රිකෝණය ඒකාකාර ත්‍රිකෝණාකාර ප්‍රිස්මයක සමාන්තර දාර තුනට ලම්බ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා වූ හරස්කඩ වේ. A තුළින් වූ දාරය නිදහස් පෘෂ්ඨය මත ද B තුළින් වූ දාරය නිදහස් පෘෂ්ඨයට පහළින් ද C තුළින් වූ දාරය නිදහස් පෘෂ්ඨයට ඉහළින් ද ඇතිව සමජාතීය ද්‍රවයක ප්‍රිස්මය නිදහසේ ඉපිලෙයි. එහි බරෙහි ද උඩුකුරු ද්‍රව තෙරපුමෙහි ද ක්‍රියා රේඛාවන් සැලකීමෙන් ප්‍රිස්මයෙහි BC අයත් මුහුණත සිරස් ව පිහිටන බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක, t කාලයේ දී, අචල මූලයක් අනුබද්ධයෙන් $\mathbf{r}$ පිහිටුම් දෛශිකය,
$\mathbf{r} = a\left[(\sin 2\omega t)\mathbf{i} + (1 - \cos 2\omega t)\mathbf{j}\right]$ මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි a හා ω ධන නියත වේ.

(i) එහි පෙත, $a\mathbf{j}$ පිහිටුම් දෛශිකය සහිත C කේන්ද්‍රය හා අරය a වූ වෘත්තයක් බවත්

(ii) C වටා එහි කෝණික ගම්‍යතාව $2ma^2\omega\mathbf{k}$ බවත්

(iii) $\ddot{\mathbf{r}} + 4\omega^2(\mathbf{r} - a\mathbf{j}) = \mathbf{0}$ බවත්

පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත ඒකාකාර $\mathbf{u} = u(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha)$ ප්‍රවේගයකින් චලනය වන ස්කන්ධය m වූ සුමට ගෝලයක් ආරම්භයේ දී නිසලව ඇති එම අරය ම හා ස්කන්ධය M වූ ගෝලයක් සමග ගැටෙයි. මෙහි $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ හා u යනු ධන නියතයක් වේ. ගැටුමෙන් පසු m සහ M හි ප්‍රවේග පිළිවෙළින් $v\mathbf{j}$ හා $w\mathbf{i}$ වෙයි නම්,

(i) ඒවායේ අන්‍යෝන්‍ය ආවේගයේ විශාලත්වය $mu\cos\alpha$ බවත්

(ii) ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{m}{M}$ බවත්

පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. ස්කන්ධය M හා අරය a වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර වළල්ලක් රළු තිරස් ගෙබිමක් මත ලිස්සීමකින් තොරව පෙරළෙයි. එහි තලය සිරස් ව තිබෙන අතර කේන්ද්‍රයේ v වේගය නියත වේ. වළල්ලේ චාලක ශක්තිය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. R සසම්භාවී විචල්‍යයක්, $r = 1, 2, 3, \ldots, n$ නිඛිල අගයන් ගන්නා අතර එක එකක සම්භාවිතාව $\frac{1}{n}$ වේ. R හි අපේක්ෂිත අගය වූ $E(R)$ සොයන්න.

$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ සූත්‍රය උපකල්පනය කරමින් R හි විචලතාවත් සොයන්න.

8. X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක් $-2, 0, 2$ අගයන් ගන්නා අතර ඒවායේ සම්භාවිතාවන් පිළිවෙළින් $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ වේ. $Y = X_1 + X_2$ සසම්භාවී විචල්‍යයෙහි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය ලබා ගන්න; මෙහි X_1 හා X_2 යනු X හි ස්වායත්ත නිරීක්ෂණ දෙකකි. Y හි සම්මත අපගමනය 2 බව පෙන්වන්න.

9. X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක $f(x)$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & , \quad 0 \le x \le 1 \text{ සඳහා} \\ 0 & , \quad \text{අනෙක් තැන්හි දී} \end{cases}$$

මගින් දෙනු ලබයි.

(i) $k = 6$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $E(X)$ හා $E(X^2)$ සොයන්න.

10. X සසම්භාවී විචල්‍යයක් $[1, 4]$ ප්‍රාන්තරය මත ඒකාකාරව ව්‍යාප්තව ඇත.

(i) $P(2 \le X \le 3)$ හා $P(X \le 2)$ සොයන්න.

(ii) $P(X \ge a) = 0.6$ වන පරිදි වූ a හි අගය සොයන්න.

* *

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2016 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2016 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2016

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 S II

B කොටස

✻ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. බල පද්ධතියක් පහත දක්වා ඇති රේඛා දිගේ ක්‍රියා කරන බල හයකින් සමන්විත වේ.

රේඛාව	බලය
$\overrightarrow{OA} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$	$P(\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$\overrightarrow{OB} = \mathbf{k} + \mathbf{i}$	$P(\mathbf{k} + \mathbf{i})$
$\overrightarrow{OC} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$	$P(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$\overrightarrow{BC} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$	$Q(\mathbf{j} - \mathbf{k})$
$\overrightarrow{CA} = \mathbf{k} - \mathbf{i}$	$Q(\mathbf{k} - \mathbf{i})$
$\overrightarrow{AB} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$	$Q(\mathbf{i} - \mathbf{j})$

මෙහි P හා Q නියත වේ. පද්ධතිය O මූලයෙ හි දී $\mathbf{R}$ තනි බලයකට හා ඝූර්ණ දෛශිකය $\mathbf{G}$ වූ යුග්මයකට ඌනනය කරන්න. පද්ධතිය,

(i) තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට,

(ii) යුග්මයකට,

තුල්‍ය වීම සඳහා අවශ්‍යතා ලබා ගන්න.

P හා Q දෙක ම නිශ්-ශූන්‍ය බව දී ඇති විට පද්ධතිය, අන්තරාලය $\dfrac{Q}{2P}$ වූ ප්‍රකුංචයකට තුල්‍ය බව පෙන්වන්න.

ප්‍රකුංචයේ කේන්ද්‍රීක අක්ෂයෙහි දෛශික සමීකරණය සොයා, එය $OABC$ චතුස්තලයෙහි කේන්ද්‍රකය ඔස්සේ යන බව සත්‍යාපනය කරන්න.

12. $AB = a$ වූ සමචතුරස්‍රයක හැඩය ඇති $ABCD$ ආස්තරයක්, සමජාතීය ද්‍රවයක, සිරස් ලෙස මුළුමනින් ම ගිල්වා ඇත්තේ AB පාදය ද්‍රවයේ නිදහස් පෘෂ්ඨය මත පිහිටන පරිදි ය. CD පාදය මත E ලක්ෂ්‍යය ගනු ලබන්නේ $CE = x$ හා $ABCE$ ත්‍රපීසියම මත තෙරපුම, ADE ත්‍රිකෝණය මත තෙරපුමට සමාන වන පරිදි ය. $x = \dfrac{a}{4}$ බව පෙන්වන්න.

අනුකලනය භාවිතයෙන්

(i) $ABCD$ සමචතුරස්‍රයෙහි,

(ii) ADE ත්‍රිකෝණයෙහි,

පීඩන කේන්ද්‍රයට AB සිට ඇති දුර සොයන්න.

AB වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්, AB සිට $ABCE$ ත්‍රපීසියමෙහි පීඩන කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න.

13. තිරසට ආනතිය α වූ සුමට තලයක උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ ඉහළට u ආරම්භක වේගයකින් ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. එහි චලිතයට වාත ප්‍රතිරෝධය mkv වේ; මෙහි k ධන නියතයක් ද v වේගය ද වේ. තලයේ ඉහළට අංශුව ගමන් කරන L උපරිම දුර $L = \frac{u}{k} + \frac{g}{k^2}\ln\left(\frac{g\sin\alpha}{ku + g\sin\alpha}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා L දුර යාමට අංශුව මගින් ගත් කාලය සොයන්න.

උපරිම බෑවුම් රේඛාව දිගේ පහළට චලිතයේ දී ත් එම ප්‍රතිරෝධය ම ක්‍රියා කරන බව දී ඇති විට, අංශුවේ u ඉහත ආරම්භක වේගයත්, එය ආරම්භක ලක්ෂ්‍යය කරා ආපසු පැමිණෙන V වේගයත් සම්බන්ධ කරන සමීකරණයක් ලබා ගන්න.

14. සුමට තිරස් මේසයක් මත චලනය වන A සුමට ගෝලයක්, මේසය මත නිශ්චලව තිබෙන B සමාන සුමට ගෝලයක් සමග සට්ටනය වෙයි. ගැටුම සිදු වන මොහොතේ දී A හි ප්‍රවේගයේ දිශාව ගෝලවල කේන්ද්‍ර රේඛාව සමග $\theta\left(<\frac{\pi}{4}\right)$ කෝණයක් සාදයි. ගෝල දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $e(0<e<1)$ වේ. ගෝල දෙක අතර අන්‍යෝන්‍ය ආවේගයෙහි J විශාලත්වය, $J = \frac{1}{2}mu(1+e)\cos\theta$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි m යනු එක් එක් ගෝලයෙහි ස්කන්ධය ද u යනු ගැටුමට පෙර A හි වේගය ද වේ.

මෙම ආවේගය භාවිතයෙන් හෝ, වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ, ගැටුම නිසා සිදු වන මුල් චාලක ශක්තියේ හානි වන භාගය δ යන්න $\delta = \frac{1}{2}(1-e^2)\cos^2\theta$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ගැටුම නිසා A හි පෙතෙහි උත්ක්‍රමණ කෝණයේ ටැංජනය T යන්න $\frac{1+e}{T} = 2t + \frac{1-e}{t}$ මගින් දෙනු ලබන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න; මෙහි $t = \tan\theta$ වේ.

ඒ නයින්, උත්ක්‍රමණය උපරිම අගයක් ගන්නේ $t = \sqrt{\frac{1-e}{2}}$ වන විට දී බව පෙන්වා, එවිට $\delta = \frac{1-e^2}{3-e}$ බව පෙන්වන්න.

15. ස්කන්ධය m හා දිග $2a$ වූ AB ඒකාකාර දණ්ඩක G මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන AB ට ලම්බ අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{1}{3}ma^2$ බව පෙන්වන්න.

AB දණ්ඩෙහි A කෙළවරට කුඩා සුමට සැහැල්ලු මුදුවක් ඈඳා ඇති අතර, තිරස් ව සවි කර ඇති සුමට ඍජු කම්බියක් දිගේ මුදුවට චලනය වීමට නිදහස ඇත. දණ්ඩ, කම්බිය දිගේ ඊට පහළින් අල්වා තබා එම පිහිටීමේ සිට නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ.

(i) දණ්ඩේ G මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය L සිරස් සරල රේඛාවක චලනය වන බව හා

(ii) දණ්ඩ තිරසට θ කෝණයක් ආනත වූ විට එහි $\dot{\theta}$ කෝණික වේගය, $a\dot{\theta}^2 = \frac{6g\sin\theta}{1+3\cos^2\theta}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

දණ්ඩ සිරස් වන විට G හි ප්‍රවේගය සොයන්න.

දැන්, දණ්ඩ සිරස් වන මොහොතේ දී මුදුව කැඩී දණ්ඩ ගුරුත්වය යටතේ පමණක් චලනය වීමට පටන් ගනියි.

පසු ව සිදු වන දණ්ඩෙහි චලිතයේ දී G මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය, එම L සිරස් සරල රේඛාව දිගේ ම නියත g ත්වරණයෙන් චලනය වන බව ද දණ්ඩ $\sqrt{\frac{6g}{a}}$ නියත කෝණික වේගයකින් G වටා භ්‍රමණය වන බව ද පෙන්වන්න.

16. (*a*) එක්තරා ක්‍රීඩාවක දී ක්‍රීඩකයෙක් ආනත තලයක් දිගේ පහළට බෝලයක් **දෙවරක්** පෙරළිය යුතු අතර එක් එක් වාරයෙහි දී බෝලය $1, 2, 4, 2, 1$ වෙන් වෙන් ව ලකුණු කර ඇති සිදුරු පහෙන් එකකට වැටී නැවතී තැන්පත් වේ. ඕනෑ ම සිදුරක බෝලය වැටී තැන්පත් වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{5}$ ක් වේ.

$X =$ "බෝලය තැන්පත් වන සිදුරුවලට ලබා දී ඇති ලකුණු දෙකෙහි එකතුව" යැයි ගනිමු. X සඳහා සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති වගුව පහත දී ඇත.

x	2	3	4	5	6	8
$P(X=x)$	$4p$	q	$4p$	$4p$	$4p$	p

p හා q හි අගයන් සොයන්න.

$E(X)$ හා $E(X^2)$ සොයා, $Var(X) = 2.4$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) Y විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක් සඳහා සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය $F(y)$ යන්න $F(y) = ky^2,\ y = 1, 2, 3$ මගින් දෙනු ලැබේ. k හි අගයත් Y හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තියත් සොයන්න.

$E(Y)$ හා $E(3Y-2)$ හි අගයන් ද සොයන්න.

17. (*a*) X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයකට $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-x) & , \quad 0 \le x \le 2, \\ 0 & , \quad \text{අනෙක් විට,} \end{cases}$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය ඇත.

(i) $P(X > 1)$ හා $P\left(X > 1 \middle| X > \frac{1}{2}\right)$ සොයන්න.

(ii) $E(X) = \frac{2}{3}$ බව පෙන්වා, $Var(X)$ සොයන්න.

(*b*) සීනි පැකට්වල බර, මධ්‍යන්‍යය 500 g හා සම්මත අපගමනය 10 g සහිත ව ප්‍රමත ලෙස ව්‍යාප්ත වී ඇත.

(i) සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගන්නා ලද පැකට් එකක බර 490 g හා 505 g අතර තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) සියලු ම පැකට්වලින් 95% ක බර, $(500 - k)$ g හා $(500 + k)$ g අතර තිබෙන පරිදි k හි අගය සොයන්න.

(iii) පැකට් පහක් සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගනු ලැබේ. මේවායින් වැඩි තරමින් දෙකක බර 495 g ට වඩා අඩුව තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

* * *